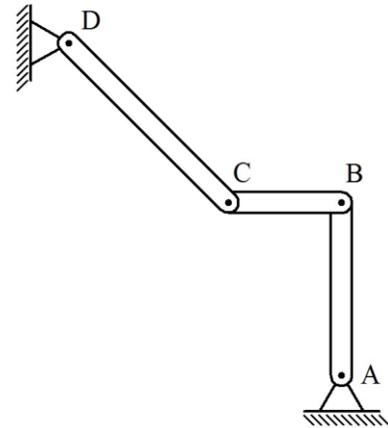
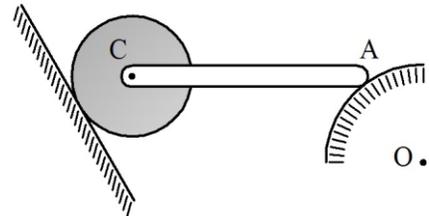


### 3.4.- PROBLEMAS PROPUESTOS

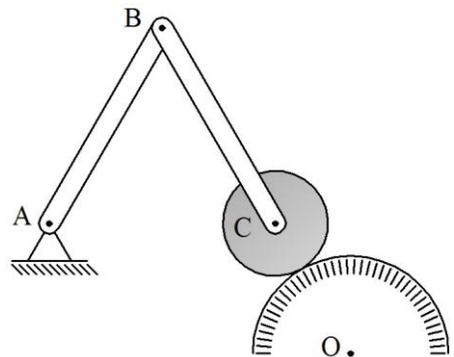
1.- La barra AB de longitud L, la barra BC de longitud L/2 y la barra CD de longitud L están articuladas entre sí tal como se muestra. Las barras AB y CD se articulan a tierra en sus extremos A y D respectivamente. Para la configuración mostrada CD forma 45° con la vertical, BC es horizontal y AB es vertical. Si la barra AB gira respecto a tierra con velocidad angular de magnitud constante  $\omega$  en sentido horario; determinar el vector velocidad angular y el vector aceleración angular de la barra CD respecto a tierra para dicha configuración.



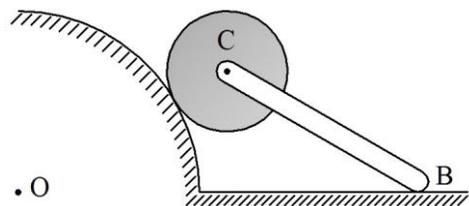
2.- El extremo A de la barra AC de longitud 3R se mueve en la superficie semicircular de centro O y radio 2R fija a tierra, y su otro extremo está articulado al centro del disco de radio R. Para la configuración mostrada la barra es horizontal y OA es paralelo a la superficie inclinada. Si el disco rueda en la superficie también fija a tierra, inclinada 60° con la horizontal y su velocidad angular es de magnitud constante  $\omega$  en sentido antihorario respecto a este marco; determinar el vector velocidad y el vector aceleración del extremo A respecto a tierra para dicha configuración.



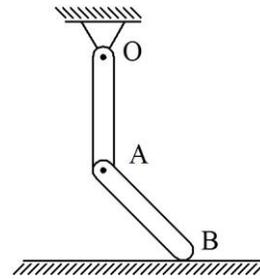
3.- El disco de centro C y radio R, la barra BC de longitud 4R y la barra AB también de longitud 4R están articulados entre sí tal como se muestra. Para la configuración mostrada O, C y B están en una recta que forma 60° con la horizontal y AC es horizontal. Si el disco rueda en la superficie semicircular de centro O y radio 3R fija a tierra con velocidad angular de magnitud constante  $\omega$  en sentido antihorario, y el extremo A de la barra AB está articulado a tierra; determinar el vector velocidad angular y el vector aceleración angular de la barra AB respecto a tierra para dicha configuración.



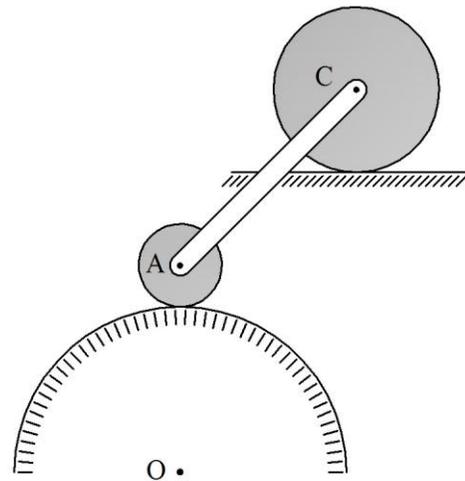
4.- El disco de centro C y radio R rueda en la superficie circular de centro O y radio 3R fija a tierra. En su centro está articulada la barra CB cuyo extremo B se mueve en la superficie horizontal también fija a tierra, con velocidad de magnitud constante  $v$  hacia la derecha. Si para la configuración mostrada la barra forma 30° con la horizontal OB y OC forma también 30° con esta dirección; determinar el vector velocidad y el vector aceleración angular del disco respecto a tierra para dicha configuración.



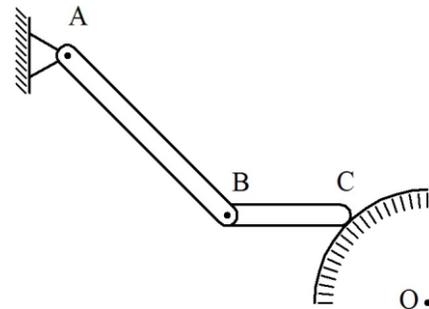
5.- La barra OA de longitud L está articulada a tierra en O, y su extremo A se articula a la barra AB también de longitud L, cuyo extremo B se mueve en la superficie horizontal fija a tierra. Si para la configuración mostrada OA es vertical, AB forma  $45^\circ$  con la horizontal y la barra OA gira desaceleradamente respecto a tierra en sentido antihorario con velocidad y aceleración angulares de magnitudes  $\omega$  y  $\omega^2/2$  respectivamente; determinar el vector velocidad y el vector aceleración del punto medio de la barra AB respecto a tierra para dicha configuración.



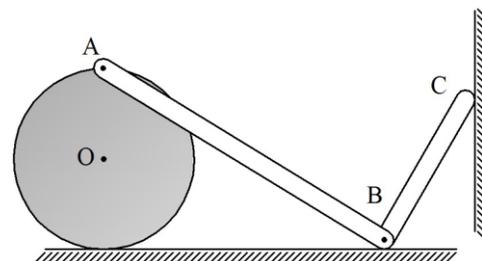
6.- El disco de centro C y radio  $2R$  rueda en la superficie horizontal fija a tierra. En su centro está articulado un extremo de la barra AC de longitud  $6R$ , cuyo otro extremo se articula al centro A del disco de radio R que rueda en la superficie semicircular de centro O y radio  $4R$  también fija a tierra. Para la configuración mostrada OA es vertical y la barra forma  $45^\circ$  con la horizontal. Si el centro del disco superior se mueve hacia la izquierda con velocidad de magnitud constante  $v$ ; determinar el vector velocidad angular y el vector aceleración angular del disco inferior respecto a tierra para dicha configuración.



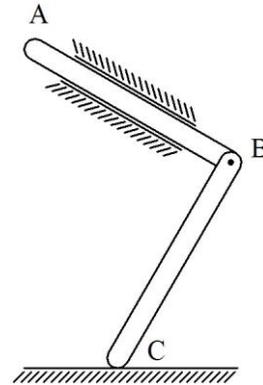
7.- La barra AB de longitud  $2R$  está articulada a tierra en A, y en B a la barra BC de longitud R, cuyo extremo C se mueve en la superficie circular de centro O y radio R fija a tierra con velocidad de magnitud constante  $v$  en sentido horario. Si para la configuración mostrada AB forma  $45^\circ$  con la vertical, BC es horizontal y OC es paralelo a AB; determinar el vector velocidad angular y el vector aceleración angular de la barra AB respecto a tierra para dicha configuración.



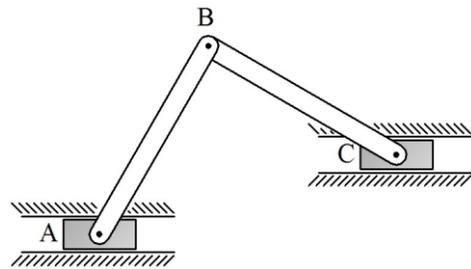
8.- El disco de centro O y radio R rueda en la superficie horizontal fija a tierra. El extremo A de la barra AB está articulado a la periferia del disco y su extremo B, además de moverse en la superficie horizontal está articulado a la barra BC de longitud  $2R$  tal como se muestra. Para la configuración mostrada AB forma  $30^\circ$  con la horizontal, OA es vertical y ambas barras son perpendiculares. Si el extremo C de la barra BC se mueve en la superficie vertical también fija a tierra con velocidad de magnitud constante  $v$  hacia arriba; determinar el vector velocidad angular y el vector aceleración angular del disco respecto a tierra para dicha configuración.



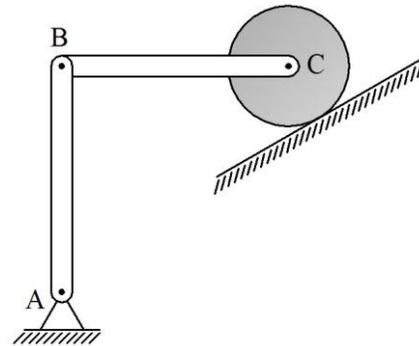
9.- La barra AB se mueve en la guía fija a tierra, inclinada  $30^\circ$  con la horizontal. Su extremo B se articula a la barra CB de longitud  $L$ , cuyo extremo C se mueve en la superficie horizontal también fija a tierra. Para la configuración mostrada las barras son perpendiculares. Si la barra AB se mueve respecto a tierra con velocidad de magnitud constante  $v$  hacia abajo; ubicar la partícula de la barra CB que posee la mayor velocidad respecto a tierra, y determinar su vector velocidad para dicha configuración.



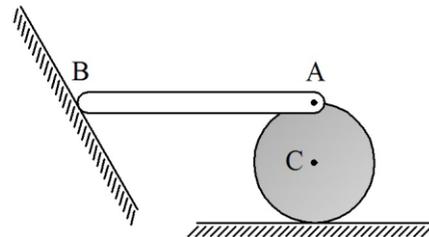
10.- Las barras AB y BC de igual longitud  $L$  están articuladas en su extremo B. Los bloques A y C están articulados a los extremos de ambas barras y se mueven en guías horizontales fijas a tierra. Si para la configuración mostrada  $\overline{AB}$  forma  $60^\circ$  con la horizontal,  $\overline{BC}$  forma  $30^\circ$  con la misma dirección, el bloque A se mueve aceleradamente respecto a tierra hacia la izquierda con velocidad y aceleración de magnitudes  $v$  y  $2v^2/L$  respectivamente, y el bloque C se mueve también aceleradamente respecto a tierra hacia la derecha con velocidad y aceleración de magnitudes  $3v$  y  $4v^2/L$  respectivamente; determinar el vector velocidad y el vector aceleración de la partícula B respecto a tierra para dicha configuración.



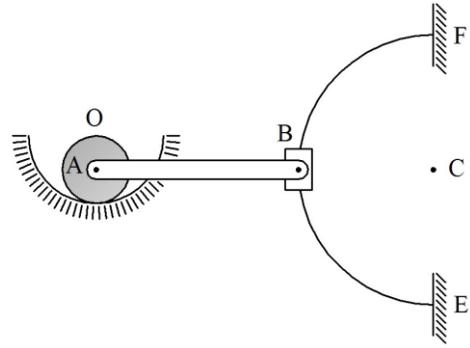
11.- La barra AB y la barra BC ambas de longitud  $2R$ , y el disco de centro C y radio  $R$  están articulados entre sí tal como se muestra. La barra AB está articulada a tierra en A, el disco rueda en la superficie fija a tierra, inclinada  $30^\circ$  con la horizontal. Si para la configuración mostrada  $\overline{AB}$  es vertical,  $\overline{BC}$  es horizontal y la barra AB gira desaceleradamente respecto a tierra en sentido horario con velocidad y aceleración angulares de magnitudes  $\omega$  y  $\omega^2/3$  respectivamente; determinar el vector velocidad angular y el vector aceleración angular del disco respecto a tierra para dicha configuración.



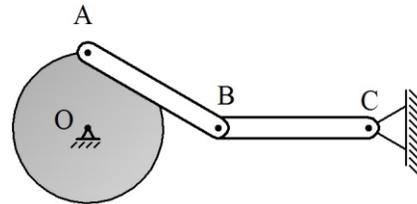
12.- El extremo B de la barra AB de longitud  $4R$  se mueve en la superficie fija a tierra, inclinada  $60^\circ$  con la horizontal. El extremo A de la barra está articulado a la periferia del disco de centro C y radio  $R$  que rueda en la superficie horizontal también fija a tierra con velocidad angular de magnitud constante  $\omega$  en sentido horario. Si para la configuración mostrada la barra es horizontal y  $\overline{CA}$  es vertical; determinar el vector velocidad y el vector aceleración del punto medio de la barra respecto a tierra para dicha configuración.



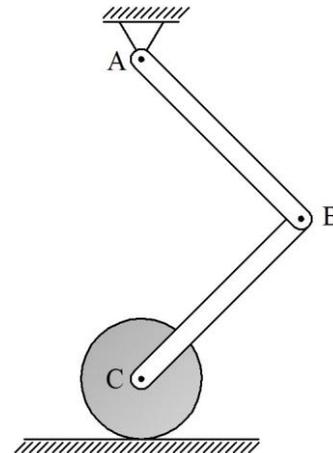
13.- El disco de centro A y radio R rueda en la superficie semicircular de centro O y radio 2R fija a tierra. La barra AB de longitud 6R está articulada al centro del disco y su extremo derecho está unido al collar B que se mueve en sentido horario con velocidad de magnitud constante  $v$  en el semiarco EF de centro C y radio 4R, también fijo a tierra. Si para la configuración mostrada A, B y C están en la misma horizontal y  $\overline{OA}$  es vertical; determinar el vector velocidad angular y el vector aceleración angular del disco respecto a tierra para dicha configuración.



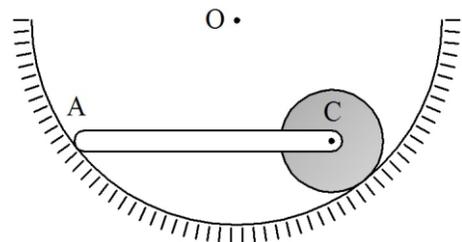
14.- El disco de radio R articulado a tierra en su centro O gira con velocidad angular de magnitud constante  $\omega$  en sentido horario. La barra AB de longitud 2R se articula a la periferia del disco en A, y en B se une a la barra BC también de longitud 2R articulada a tierra en C. Si para la configuración mostrada O, B y C están alineados horizontalmente y  $\overline{OA}$  es vertical; determinar el vector velocidad angular y el vector aceleración angular de la barra BC respecto a tierra para dicha configuración.



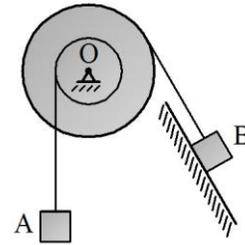
15.- La barra AB de longitud 4R está articulada a tierra en A, y en B se une a la barra BC de longitud 3R, cuyo extremo C está articulado al centro del disco de radio R que rueda en la superficie horizontal fija a tierra. Si para la configuración mostrada  $\overline{AC}$  es vertical, ambas barras son perpendiculares y la barra AB gira desaceleradamente respecto a tierra en sentido antihorario con velocidad y aceleración angulares de magnitudes  $\omega$  y  $\omega^2$  respectivamente; determinar el vector velocidad angular y el vector aceleración angular del disco respecto a tierra para dicha configuración.



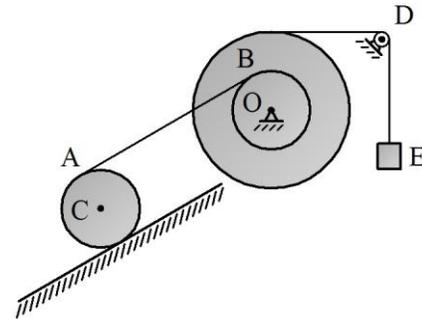
16.- El disco de centro C y radio R rueda en la superficie semicircular de centro O y radio 4R fija a tierra. La barra AC está articulada al centro del disco, y su extremo A se mueve en la misma superficie. Para la configuración mostrada la barra es horizontal. Si la barra gira respecto a tierra con velocidad angular de magnitud constante  $\omega$  en sentido horario,  $\overline{OA}$  y  $\overline{OC}$  son perpendiculares; determinar el vector velocidad y el vector aceleración del centro del disco respecto a tierra para dicha configuración.



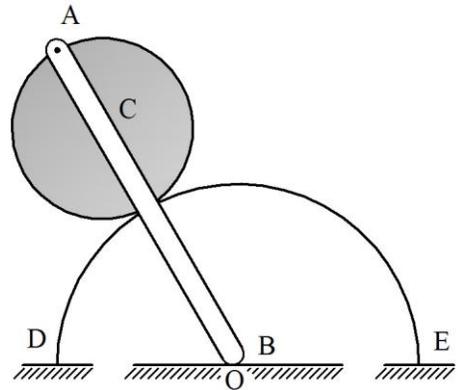
17.- El carrete formado por dos discos rígidamente unidos entre sí está articulado a tierra en su centro geométrico O. En el disco de radio R se enrolla† la cuerda cuyo extremo se une al bloque A. En el disco de radio 2R se enrolla otra cuerda cuyo extremo se une al bloque B que se mueve en la superficie fija a tierra, inclinada 60° con la horizontal. Si para la configuración mostrada el bloque A desciende aceleradamente con velocidad y aceleración de magnitudes  $v$  y  $v^2/4R$  respectivamente; determinar el vector velocidad y el vector aceleración del bloque B respecto a tierra para dicha configuración. El tramo de cuerda que une al bloque B con el disco es paralelo a la superficie.



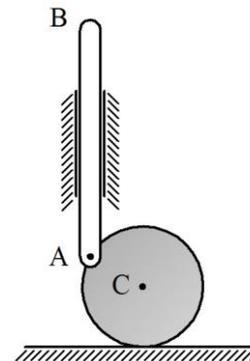
18.- El disco de centro C y radio R rueda en la superficie fija a tierra, inclinada 30° con la horizontal. La cuerda que se enrolla en el disco también lo hace en otro disco de radio R que forma parte de un carrete, articulado a tierra en su centro O. Otra cuerda se enrolla al disco de radio 2R rígidamente unido al anterior, pasa por la polea D de radio despreciable articulada a tierra y se une en su extremo al bloque E. Si para la configuración mostrada el bloque E desciende desaceleradamente con velocidad y aceleración de magnitudes  $v$  y  $v^2/2R$  respectivamente; determinar el vector velocidad angular y el vector aceleración angular del disco de centro C respecto a tierra para dicha configuración. El tramo de cuerda entre los discos de radio R es paralelo a la superficie.



19.- El disco de centro C y radio R rueda en el semicirculo DE de centro O y radio 2R fijo a tierra. La barra AB se articula a la periferia del disco en A, y su extremo B se mueve en la superficie horizontal también fija a tierra. Si para la configuración mostrada A, C, B y O están en una recta que forma 60° con la horizontal y el disco gira aceleradamente respecto a tierra en sentido antihorario con velocidad y aceleración angulares de magnitudes  $\omega$  y  $\sqrt{3}\omega^2/6$  respectivamente; determinar el vector velocidad angular y el vector aceleración angular de la barra respecto a tierra para dicha configuración. D, O y E están en la misma horizontal.

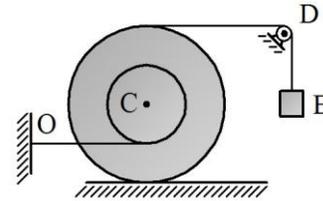


20.- El disco de centro C y radio R se mueve en la superficie horizontal fija a tierra. En su periferia se encuentra articulada la barra AB que se mueve en la guía vertical también fija a tierra. Si para la configuración mostrada CA forma 30° con la horizontal y la barra desciende desaceleradamente con velocidad y aceleración de magnitudes  $v$  y  $v^2/2R$  respectivamente; determinar el vector velocidad angular y el vector aceleración angular del disco respecto a tierra para dicha configuración.

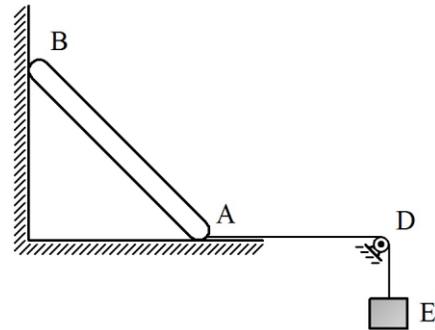


† Toda cuerda que se enrolla sobre una superficie circular, se entenderá que no desliza sobre la misma.

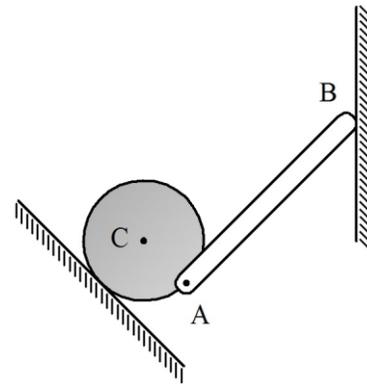
21.- El carrete de centro C formado por dos discos concéntricos rígidamente unidos, gira y desliza en la superficie horizontal fija a tierra. La cuerda enrollada en el disco de radio R se encuentra fija a tierra en su extremo O. La cuerda enrollada al disco de radio 2R pasa por la polea D de radio despreciable articulada a tierra y se une en su extremo al bloque E. Si para la configuración mostrada el carrete gira aceleradamente respecto a tierra en sentido horario con velocidad y aceleración angulares de magnitudes  $\omega$  y  $\omega^2/3$  respectivamente; determinar el vector velocidad y el vector aceleración del bloque respecto a tierra para dicha configuración. El tramo de cuerda entre O y el disco pequeño, y el tramo de cuerda entre el disco grande y la polea D son paralelos a la superficie.



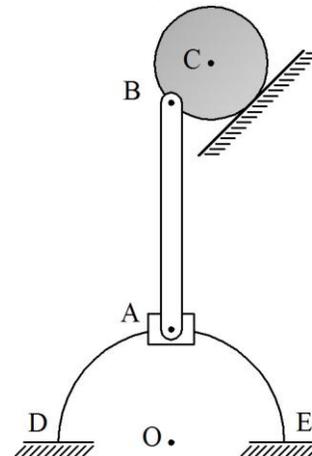
22.- El extremo A de la barra AB de longitud L se mueve en la superficie horizontal fija a tierra, y su extremo B se mueve en la superficie vertical también fija a tierra. La cuerda unida al extremo A de la barra pasa por la polea D de radio despreciable articulada a tierra y se une en su otro extremo al bloque E. Para la configuración mostrada la barra forma  $45^\circ$  con la horizontal. Si el extremo B desciende con velocidad de magnitud constante  $v$ ; determinar el vector velocidad y el vector aceleración del bloque respecto a tierra para dicha configuración. El tramo de cuerda entre el extremo A y la polea es horizontal.



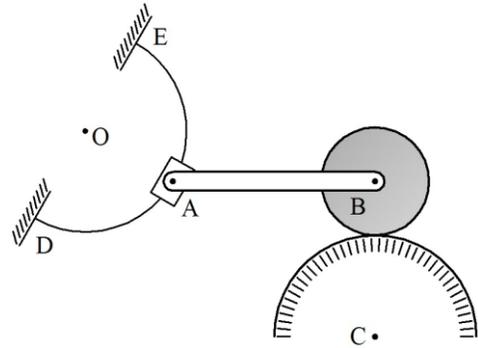
23.- El disco de centro C y radio R rueda en la superficie fija a tierra, inclinada  $45^\circ$  con la horizontal. A la periferia del disco se articula la barra AB de longitud 2R, cuyo extremo B se mueve en la superficie vertical también fija a tierra. Si para la configuración mostrada CA es paralelo a la superficie inclinada, la barra forma  $45^\circ$  con la vertical y el disco gira desaceleradamente respecto a tierra en sentido horario con velocidad y aceleración angulares de magnitudes  $\omega$  y  $\omega^2/2$  respectivamente; determinar el vector velocidad angular y el vector aceleración angular de la barra respecto a tierra para dicha configuración.



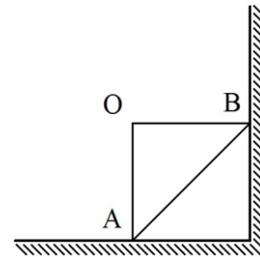
24.- El disco de centro C y radio R rueda en la superficie fija a tierra, inclinada  $45^\circ$  con la horizontal. A la periferia del disco se articula la barra AB de longitud 4R, cuyo extremo A está articulado al collar que se mueve aceleradamente en sentido antihorario en el semiarco DE de centro O y radio 2R también fijo a tierra. Si para la configuración mostrada O, A y B están en la misma vertical, BC es paralelo a la superficie, la magnitud del vector velocidad del collar es  $v$  y la magnitud de su vector aceleración tangencial es  $\sqrt{2} v^2 / 2R$ , ambos respecto a tierra; determinar el vector velocidad angular y el vector aceleración angular del disco respecto a tierra para dicha configuración. D, O y E están en la misma horizontal.



25.- El disco de centro B y radio R rueda en la superficie semicircular de centro C y radio 2R fija a tierra. Al centro del disco se articula la barra AB de longitud 4R, cuyo extremo A está unido al collar que se mueve en el semiarco DE de centro O y radio 2R también fijo a tierra. Si para la configuración mostrada  $\overline{OA}$  forma  $60^\circ$  con la vertical,  $\overline{AB}$  es horizontal,  $\overline{CB}$  es vertical y el collar se mueve aceleradamente respecto a tierra en sentido antihorario con velocidad y aceleración tangencial de magnitudes  $v$  y  $\sqrt{3}v^2/2R$  respectivamente; determinar el vector velocidad angular y el vector aceleración angular del disco respecto a tierra para dicha configuración.

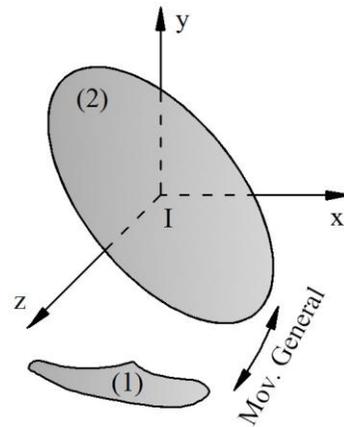


26.- El vértice B de la placa en forma de triángulo rectángulo, de lado L se mueve en la superficie vertical fija a tierra y su vértice A se mueve hacia la izquierda en la superficie horizontal también fija a tierra con velocidad de magnitud constante  $v$ . Si para la configuración mostrada  $\overline{AB}$  forma  $45^\circ$  con la horizontal; ubicar la partícula de la placa contenida en el lado AB que posee la menor velocidad respecto a tierra para dicha configuración, y además determinar la magnitud de su vector velocidad.



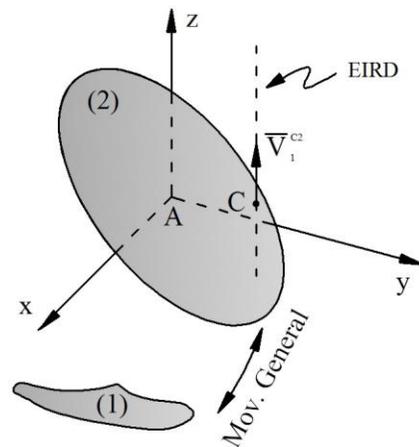
27.- El cuerpo rígido 2 tiene movimiento general respecto al marco de referencia 1. Sea I una partícula del cuerpo contenida en el Eje Instantáneo de Rotación y Deslizamiento (E.I.R.D.), que además coincide con el origen del sistema de coordenadas cartesianas (xyz) solidario al cuerpo. Si para la configuración mostrada la magnitud de la velocidad de la partícula I respecto al marco 1 es  $v$  y el vector velocidad angular del cuerpo respecto al mismo marco es:  $\overline{\omega}_{21} = \omega_o \hat{i} + \omega_o \hat{j}$ ; demostrar que para esta configuración se cumple:

$$\left. \frac{d\hat{i}}{dt} \right|_1 \circ \overline{V}_1^{I2} = 0$$



28.- Para una determinada configuración el Eje Instantáneo de Rotación y Deslizamiento (E.I.R.D.) del cuerpo 2 en movimiento general respecto al marco de referencia 1, es paralelo al eje z del sistema cartesiano solidario al cuerpo. Para esta misma configuración el vector velocidad de la partícula C perteneciente a dicho eje es de magnitud  $v$  y su sentido es según el eje z positivo. Si la magnitud del vector velocidad angular del cuerpo respecto al marco 1 es  $v/\lambda$ , donde  $\lambda$  es constante; demostrar que bajo estas condiciones se cumple la siguiente relación:

$$\overline{V}_1^{C2} = \lambda \hat{i} \times \left. \frac{d\hat{i}}{dt} \right|_1$$



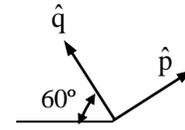
**3.5.- RESPUESTAS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS**

$$1.- \quad \bar{\omega}_{41} = \sqrt{2} \omega \hat{k} \quad ; \quad \bar{\alpha}_{41} = \sqrt{2} (2 + \sqrt{2}) \omega^2 \hat{k}$$

donde 4 es la barra CD

$$2.- \quad \bar{V}_1^{A2} = -\frac{\sqrt{3}R}{3} \omega \hat{p} \quad ; \quad \bar{a}_1^{A2} = -\frac{19\sqrt{3}R}{54} \omega^2 \hat{p} - \frac{R}{6} \omega^2 \hat{q}$$

donde 2 es la barra



$$3.- \quad \bar{\omega}_{21} = \bar{0} \quad ; \quad \bar{\alpha}_{21} = -\frac{\sqrt{3}}{12} \omega^2 \hat{k}$$

donde 2 es la barra AB

$$4.- \quad \bar{\omega}_{21} = -\frac{1}{R} v \hat{k} \quad ; \quad \bar{\alpha}_{21} = -\frac{\sqrt{3}}{4R^2} v^2 \hat{k}$$

donde 2 es el disco

$$5.- \quad \bar{V}_1^{C3} = L \omega \hat{i} \quad ; \quad \bar{a}_1^{C3} = -L \omega^2 \hat{i} + \frac{L}{2} \omega^2 \hat{j}$$

donde 3 es la barra AB y C su punto medio

$$6.- \quad \bar{\omega}_{21} = \frac{1}{R} v \hat{k} \quad ; \quad \bar{\alpha}_{21} = -\frac{1}{5R^2} v^2 \hat{k}$$

donde 2 es el disco inferior

$$7.- \quad \bar{\omega}_{31} = \frac{1}{2R} v \hat{k} \quad ; \quad \bar{\alpha}_{31} = \frac{3}{4R^2} v^2 \hat{k}$$

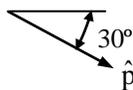
donde 3 es la barra AB

$$8.- \quad \bar{\omega}_{21} = -\frac{\sqrt{3}}{2R} v \hat{k} \quad ; \quad \bar{\alpha}_{21} = -\frac{\sqrt{3}(16\sqrt{3} - 3)}{24R^2} v^2 \hat{k}$$

donde 2 es el disco

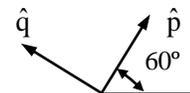
$$9.- \quad \bar{V}_1^{B2} = v \hat{p}$$

donde 2 es la barra CB



$$10.- \quad \bar{V}_1^{B3} = 3v \hat{i} - 2v \hat{p} \quad ; \quad \bar{a}_1^{B3} = \frac{4}{L} v^2 \hat{i} - \frac{15}{L} v^2 \hat{p} - \frac{4}{L} v^2 \hat{q}$$

donde 3 es la barra BC



$$11.- \quad \bar{\omega}_{41} = -\frac{4\sqrt{3}}{3} \omega \hat{k} \quad ; \quad \bar{\alpha}_{41} = \frac{8\sqrt{3}}{9} \omega^2 \hat{k}$$

donde 4 es el disco

$$12.- \quad \bar{\mathbf{V}}_1^{D^3} = 2R\omega \hat{i} - \sqrt{3}R\omega \hat{j} \quad ; \quad \bar{\mathbf{a}}_1^{D^3} = \frac{3R}{2}\omega^2 \hat{i} - \frac{R(1+3\sqrt{3})}{2}\omega^2 \hat{j}$$

donde 3 es la barra y D su punto medio

$$13.- \quad \bar{\omega}_{21} = \bar{0} \quad ; \quad \bar{\alpha}_{21} = -\frac{5}{12R^2}v^2 \hat{k}$$

donde 2 es el disco

$$14.- \quad \bar{\omega}_{41} = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega \hat{k} \quad ; \quad \bar{\alpha}_{41} = -\frac{3(2+\sqrt{3})}{4}\omega^2 \hat{k}$$

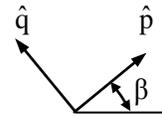
donde 4 es la barra BC

$$15.- \quad \bar{\omega}_{21} = -5\omega \hat{k} \quad ; \quad \bar{\alpha}_{21} = \frac{5}{4}\omega^2 \hat{k}$$

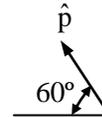
donde 2 es el disco

$$16.- \quad \bar{\mathbf{V}}_1^{C^2} = -3R\omega \hat{p} \quad ; \quad \bar{\mathbf{a}}_1^{C^2} = 3R\omega^2 \hat{q}$$

donde 2 es el disco y  $\beta = \text{tg}^{-1}(3/4)$



$$17.- \quad \bar{\mathbf{V}}_1^B = 2v \hat{p} \quad ; \quad \bar{\mathbf{a}}_1^B = \frac{1}{2R}v^2 \hat{p}$$



$$18.- \quad \bar{\omega}_{21} = -\frac{1}{4R}v \hat{k} \quad ; \quad \bar{\alpha}_{21} = \frac{1}{8R^2}v^2 \hat{k}$$

donde 2 es el disco de centro C

$$19.- \quad \bar{\omega}_{31} = \frac{1}{2}\omega \hat{k} \quad ; \quad \bar{\alpha}_{31} = \frac{\sqrt{3}}{6}\omega^2 \hat{k}$$

donde 3 es la barra

$$20.- \quad \bar{\omega}_{21} = \frac{2\sqrt{3}}{3R}v \hat{k} \quad ; \quad \bar{\alpha}_{21} = -\frac{7\sqrt{3}}{9R^2}v^2 \hat{k}$$

donde 2 es el disco

$$21.- \quad \bar{\mathbf{V}}_1^E = -3R\omega \hat{j} \quad ; \quad \bar{\mathbf{a}}_1^E = -R\omega^2 \hat{j}$$

$$22.- \quad \bar{\mathbf{V}}_1^E = -v \hat{j} \quad ; \quad \bar{\mathbf{a}}_1^E = \frac{2\sqrt{2}}{L}v^2 \hat{j}$$

23.-  $\bar{\omega}_{31} = \bar{0}$  ;  $\bar{\alpha}_{31} = \frac{1}{2} \omega^2 \hat{k}$   
 donde 3 es la barra

24.-  $\bar{\omega}_{31} = \bar{0}$  ;  $\bar{\alpha}_{31} = \frac{3\sqrt{2}}{8R^2} v^2 \hat{k}$   
 donde 3 es el disco

25.-  $\bar{\omega}_{31} = -\frac{1}{2R} v \hat{k}$  ;  $\bar{\alpha}_{31} = -\frac{1}{3R^2} v^2 \hat{k}$   
 donde 3 es el disco

26.-  $v_1^{C2} = \frac{\sqrt{2}}{2} v$   
 donde 2 es la placa y C es el punto medio del lado AB