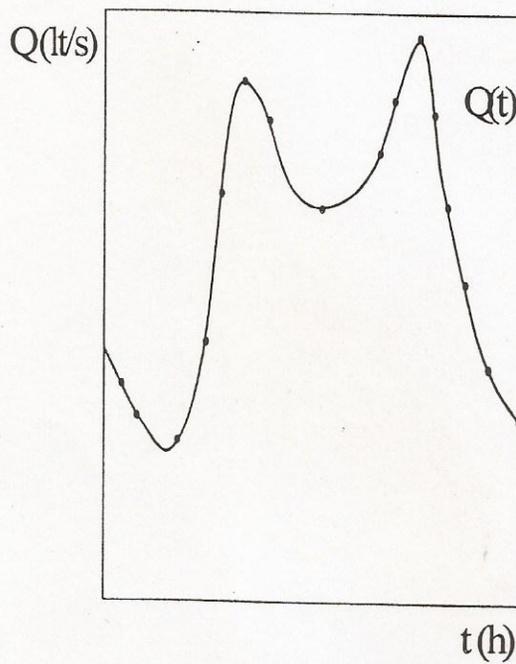


1.300 25

Departamento de Investigación de
Operaciones y Computación (DIOC)
Facultad de Ingeniería
Universidad Central de Venezuela



ALGUNOS ALGORITMOS DE INTEGRACION NUMERICA

Prof. Néstor Carrasquero
Prof. Marilyn Ramos

JULIO, 1.999

INDICE

	PÁGINA
1. INTRODUCCION	1
2. DEFINICION DEL PROBLEMA.....	3
2.1.- INTEGRACION POR DEFINICION REGLA DEL RECTANGULO	4
3. ALCANCE	6
4. INTEGRACION NUMERICA SIMPLE	8
4.1.- FORMULAS CERRADAS DE NEWTON-COTES	11
4.2.- FORMULAS ABIERTAS DE NEWTON-COTES	13
4.3.- ALGORITMOS PARA INTEGRACION NUMERICA SIMPLE: ALGUNOS RESULTADOS	14
5. INTEGRACION NUMERICA COMPUESTA.....	18
5.1.- CASO DE FUNCIONES DISCRETAS CON PUNTOS NO EQUIESPACIADOS	19
6. METODOS CUANDO SE CONOCE LA EXPRESION ANALITICA DE f	20
6.1.- INTEGRACION DE ROMBERG.....	20
6.1.1.- EXTRAPOLACION DE RICHARDSON.....	21
6.1.2.- FORMA PARTICULAR DE LA REGLA TRAPEZIAL COMPUESTA	23
6.1.3.- ALGORITMO DE ROMBERG	24
6.2.- CUADRATURA GAUSSIANA	25
7. INTEGRACION ADAPTATIVA	27
8. ESCOGENCIA DEL METODO DE INTEGRACION.....	32
9. ANEXOS	
PROGRAMAS	
□ INTEGRACION NUMERICA POR DEFINICION.....	34
□ INTEGRACION NUMERICA SIMPLE NEWTON-COTES.....	38
□ INTEGRACION ADAPTATIVA	47
10. BIBLIOGRAFIA	50

1.- INTRODUCCION

Tal como se presenta, una interpretación física de la integración numérica es la determinación del área bajo la curva. La integración de una función tiene tantas aplicaciones en la Ingeniería que la hace un tema obligado en el pensum de estudio de la carrera. Pueden darse muchos ejemplos específicos de sus aplicaciones en todos los campos de la Ingeniería. Entre otros podemos presentar:

- 1) Uso de la integración para determinar la media o promedio de una función continua $y=f(x)$ en un intervalo $[a,b]$, donde:

$$\text{Media} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$$

La cual puede utilizarse para calcular el centro de gravedad de objetos irregulares y para determinar la corriente RMS en Ingeniería Eléctrica.

- 2) Uso de la integración para evaluar la cantidad total o para cuantificar una variable física dada. La integral puede evaluarse sobre una línea, un área o un volumen. Por ejemplo, la cantidad total de masa de sustancias químicas que contiene un reactor está dada por:

$$\text{masa} = \frac{\text{concentración}}{\text{volumen}}$$

Si suponemos que la concentración varía de posición a posición dentro del reactor, será necesario sumar los productos de concentración local C_i y sus volúmenes elementales correspondientes ∇V_i .

Si $C(x,y,z)$ es una función conocida y X,Y,Z son variables independientes que denotan la posición en coordenadas cartesianas \Rightarrow

$$\text{masa} = \iiint C(x, y, z) dx dy dz$$

que es una integral de volumen

- 3) Uso de la integración para la evaluación de ecuaciones promedio. En el diseño de sistemas de abastecimiento de agua es básico manejar los parámetros relativos a los caudales y volúmenes de consumo. Un ingeniero conoce la curva de variaciones horarias del consumo de agua en un cierto día para una determinada población (similar a la mostrada en la Figura 1) y desea determinar el volumen (V) consumido en el día. El volumen consumido en un intervalo de tiempo $[T_1, T_2]$ está definido mediante la relación matemática $V = \int_{T_1}^{T_2} Q(t) dt$. Donde $Q(t)$ es la función del tiempo que describe la curva de consumo horario. Surgen inmediatamente dos preguntas: ¿Cómo calcular la integral?, ¿Cuál es la expresión analítica de Q ? En la práctica lo que se conocen son los puntos $(t, f(t))$ que sirvieron para plotear la curva de la Figura 1. Por supuesto que el ingeniero podrá salir airoso del problema acudiendo a mecanismos de integración gráfica o construyendo una tabla que le permita calcular en forma aproximada el volumen mediante la aplicación de una sumatoria del tipo:

$$V = \sum_{i=1}^n Q(x_i) * (t_i - t_{i-1})$$

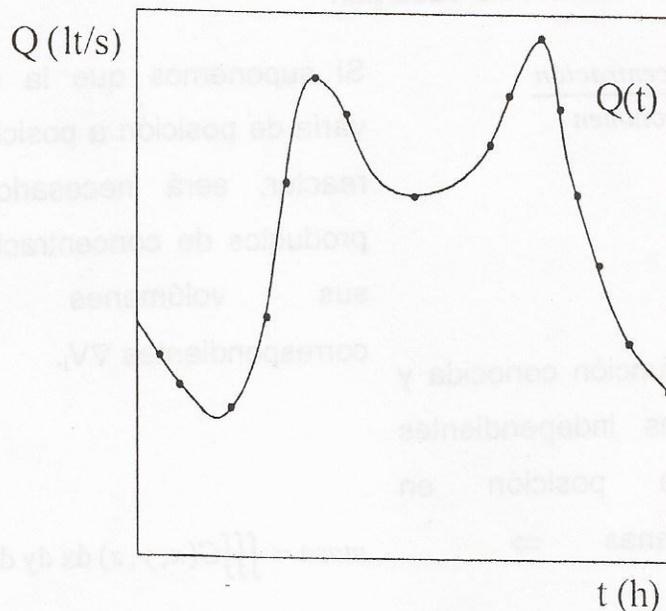


Figura 1

En los problemas de Ingeniería surge con frecuencia la necesidad de evaluar la integral definida:

$$I_f = \int_{a_1}^{b_1} f(x) dx$$

La función a integrarse, en general, será de una de las tres formas siguientes:

- 1) Una función simple y continua (polinómica, trigonométrica o exponencial).
- 2) Una función complicada y continua, que es difícil o imposible de integrar directamente.
- 3) Una función tabulada en donde los valores de x y $f(x)$ se dan en un conjunto de puntos discretos, como es el caso de datos experimentales.

En el primer caso, la integral simplemente es una función que se puede evaluar fácilmente usando métodos analíticos. En los dos últimos casos, sin embargo, se deben emplear métodos aproximados. Estos métodos alternativos son llamados de *Integración Numérica*.

La forma de los datos tiene una influencia importante en el esquema que se va a usar para evaluar la integral. Para el caso de información tabular, se está limitado al número de puntos dados. En contraste, si se dispone de la función analíticamente, entonces se pueden generar tantos valores de $f(x)$ como sean necesarios para alcanzar una exactitud aceptable.

Los métodos que revisaremos serán aplicables en situaciones cuando:

- 1) f está definida por un conjunto de valores experimentales ($x, f(x)$) y no se conoce su expresión analítica.
- 2) Aún conociendo la expresión analítica de f , no se puede calcular su primitiva o esta primitiva es difícil de evaluar.

2.- DEFINICION DEL PROBLEMA

En los cursos de cálculo aprendimos que la integral definida de una función continua sobre un intervalo $[a , b]$ se puede calcular como:

$$I_f = \int_a^b f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_k f(c_k) \delta x_k = F(b) - F(a)$$

donde F es la primitiva de f . I_f representa el área encerrada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $x=a$, $x=b$ y $y=0$, considerando las áreas como negativas cuando $f(x)$ sea negativa.

El primer acercamiento al problema puede ser por la vía analítica, es decir, si se conoce la expresión de f se le puede intentar integrar aplicando los métodos de cálculo de primitivas, con lo cual se tiene un resultado exacto. En caso de que esto no sea posible, o simplemente la vía analítica no resulte práctica, se puede acudir a los métodos aproximados de integración numérica.

La idea básica de los métodos de integración numérica es aproximar la integral I_f mediante una sumatoria del tipo:

$$I_f \approx \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

la cual recibe el nombre de *Cuadratura Numérica* o también *Fórmula de Integración Numérica*. Cada uno de los n puntos x_i recibe el nombre de *punto de cuadratura* o *nodo* y cada uno de los α_i recibe el nombre de *Coefficiente de Cuadratura*. Los problemas básicos de la integración numérica consistirán en escoger adecuadamente los nodos y los coeficientes de cuadratura.

2.1.- INTEGRACION POR DEFINICION: REGLA DEL RECTANGULO

La definición de la integral como una sumatoria de áreas sugiere un método algorítmico. Si nos conformamos con un número de intervalos finito (n) podemos adoptar la siguiente expresión aproximada:

$$I_f = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

Donde f es una función continua sobre $[a,b]$ y c_k pertenece a $[x_{k-1}, x_k]$. Si tomamos como c los nodos de cuadratura tendremos dos áreas posibles, una

superior y otra inferior, según sea f creciente o decreciente. En todo caso, sus expresiones son:

$$I_1 = \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \quad \text{e} \quad I_2 = \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1})$$

Y ellas acotan el valor de I_f de manera que si f es creciente se cumple $I_1 < I_f < I_2$ y si es decreciente se tiene que $I_2 < I_f < I_1$. Lo cierto es que cuando n se hace grande ambas áreas así obtenidas tienden a un valor único: el valor de I_f .

La integración sobre un intervalo $[x_0, x_1]$ equivale a tomar $n=1$, lo cual arroja la **Regla del Rectángulo**, cuya expresión es:

$$I_f \approx (x_1 - x_0) f(x_0)$$

Si se toma el valor de la izquierda, o bien:

$$I_f \approx (x_1 - x_0) f(x_1)$$

Si se toma el valor de la derecha. De hecho, lo que se ha realizado es aproximar la función mediante un polinomio de grado cero. Si tomamos el polinomio de Taylor de grado cero en x_0 se tiene:

$$p(x) = f(x_0) + f'(\epsilon)(x - x_0)$$

Donde ϵ está entre x_0 y x_1 , al integrarlo sobre $[x_0, x_1]$

$$\int_{x_0}^{x_1} p(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x_0) dx + \int_{x_0}^{x_1} f'(\epsilon)(x - x_0) dx$$

Lo cual arroja:

$$\int_{x_0}^{x_1} p(x) dx = (x_1 - x_0) f(x_0) + \frac{1}{2} f'(\epsilon)(x_1 - x_0)^2$$

Definiendo $h = x_1 - x_0$ se tiene:

$$\int_{x_0}^{x_1} p(x) dx = h f(x_0) + \frac{h^2}{2} f'(\epsilon)$$

expresión cuyo primer término representa el valor aproximado de la integral y cuyo segundo término representa el error de truncamiento. Si se trabaja con x_0 se tiene que:

$$I_r = hf(x_0)$$

Y si se trabaja con x_1 se llega a:

$$I_r = hf(x_1)$$

En cualquier caso, el error de truncamiento viene dado por:

$$E_r = \frac{h^2}{2} f'(\epsilon)$$

Para algún ϵ entre x_0 y x_1 . Este error será nulo cuando f' sea nula, es decir, si f es una constante.

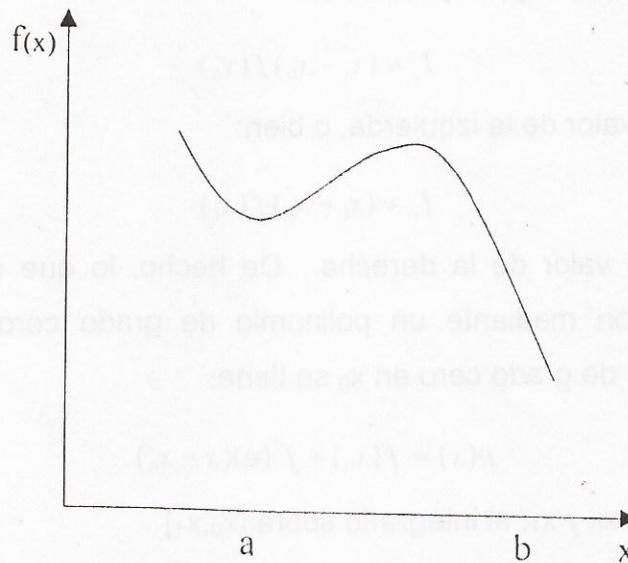


Figura 2

Resulta obvio que la aplicación de la regla del rectángulo sobre todo el intervalo $[a,b]$ arrojará un valor cercano al área si $[a,b]$ es pequeño y si la función presenta pendientes bajas en ese intervalo, de resto no será, ni siquiera, una aproximación grosera (ver Figura 2). La aplicación de esta regla tiene sentido práctico cuando se utiliza la integración numérica compuesta, es decir, cuando se divide $[a,b]$ en pequeños subintervalos y se usa la regla del rectángulo sucesivamente sobre cada uno de ellos.

3.- ALCANCE

Los métodos de integración numérica que revisaremos, según se apliquen a funciones definidas mediante su expresión analítica (definidas en forma continua), o a funciones definidas mediante conjuntos de puntos (definidas en forma discreta), se suelen agrupar en dos categorías:

1. Los que se pueden aplicar a ambos tipos de funciones (tanto las definidas en forma continua como las definidas en forma discreta), pues sólo emplean el valor de la función en los nodos de cuadratura.
2. Los que sólo son aplicables a funciones definidas en forma continua, pues requieren el valor de la función en puntos distintos de los nodos de cuadratura, y por ello, requieren de la expresión analítica de la función.

Una alternativa válida para atacar y resolver el problema de la integración numérica consiste en escoger otra función, fácil de integrar y que sea una aproximación "adecuada" a f en el intervalo de estudio, en cuyo caso la integral definida de la función sustituta sobre dicho intervalo sería una aproximación a I_f . Los polinomios surgen entonces como una alternativa viable ya que cumplen con ambas condiciones, por una parte resultan muy fáciles de integrar y por la otra, toda función continua sobre un intervalo $[a,b]$ puede ser aproximada mediante un polinomio cuyo valor coincida con el de la función en un conjunto finito de puntos.

En la Figura 3 se muestra una aproximación a la función f mediante un polinomio p cuyos valores en los nodos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ coinciden con los de f . Así podemos afirmar que:

$$I_f = \int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p(x) dx = I_p$$

Definiendo:

$$\delta(x) = f(x) - p(x)$$

Tendremos que el error cometido será:

$$\int_a^b \delta(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b p(x) dx$$

Como se observa en la Figura 3, $\delta(x)$ puede cambiar de signo de un subintervalo a otro, por lo cual, los errores positivos suelen cancelarse con los negativos, lo que contribuye a suavizar el error total en la mayoría de los casos prácticos. El error que introduce la sustitución de f por p se denomina error de truncamiento, el cual viene a sumarse al error de redondeo, derivado de utilizar una aritmética de precisión finita como la que emplean los computadores.

La escogencia de un polinomio como sustituto de la función f para la integración genera dos alternativas claras:

1. Usar un polinomio que se ajuste simultáneamente a n puntos (generalmente equiespaciados) sobre $[a,b]$ e integrarlo una sola vez para obtener el área total. Es la llamada *Integración Numérica Simple*.
2. Usar un polinomio que se ajuste a unos pocos puntos consecutivos sobre $[a,b]$ e integrarlo, repitiendo la operación hasta que se cubre todo $[a,b]$. El área total será entonces, la suma de las áreas parciales así obtenidas, es la llamada *Integración Numérica Compuesta*.

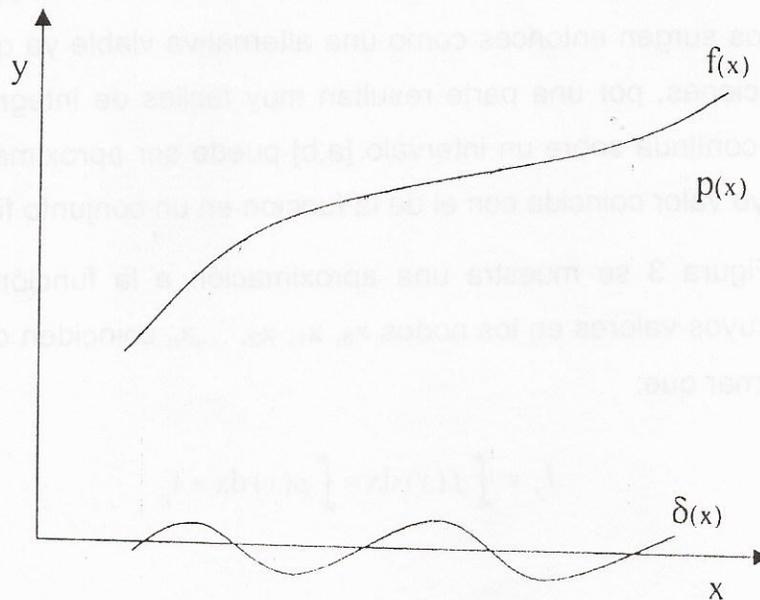


Figura 3

4.- Integración Numérica Simple.

La integración numérica se puede realizar sobre un único intervalo, y consiste en aproximar la función mediante un polinomio sobre todo $[a,b]$ e integrarlo. En caso de que $[a,b]$ sea "grande" se requiere un mayor número de puntos, por lo que el polinomio interpolante suele ser de grado alto, lo que por una parte puede ocasionar un mayor error de redondeo al aumentar el número de operaciones, y por otra parte, puede ocasionar un mayor error de truncamiento por la naturaleza oscilatoria de tales polinomios de grado alto. Llamaremos a esta forma de proceder integración simple, la cual generalmente, funciona si $[a,b]$ es pequeño y si se logran calcular los coeficientes del polinomio sin grandes errores. Entre los métodos más conocidos citaremos las Fórmulas de Newton-Cotes.

Las Fórmulas de Newton-Cotes son los esquemas de integración numérica más utilizados. Pueden deducirse mediante la integración del polinomio de Lagrange y de su término de error de truncamiento sobre $[a,b]$ con lo cual se obtiene la fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x) dx + \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\epsilon(x))}{(n+1)!} dx$$

$$= \sum_{i=0}^n a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) f^{(n+1)}(\epsilon(x)) dx$$

Donde $\epsilon(x)$ está en $[a,b]$ para cada x,y .

$$a_i = \int_a^b L_i(x) dx = \int_a^b \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} dx$$

Para cada $i=0,1,\dots,n$

El área aproximada vendrá dada entonces por:

$$I_f = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

Y su error de truncamiento será:

$$E_f = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^n (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x)) dx$$

Nótese que el error de truncamiento será nulo cuando la $(n+1)$ -ésima derivada de f sea nula.

De esta expresión se derivan dos variantes de las *Fórmulas de Newton-Cotes*: las llamadas *Fórmulas Cerradas* y las llamadas *Fórmulas Abiertas*. Las fórmulas cerradas utilizan el valor de la función en los límites de integración a y b , es decir, a y b son nodos de cuadratura (ver Figura 4). Las fórmulas abiertas no requieren información sobre f en los límites de integración (véase Figura 5).

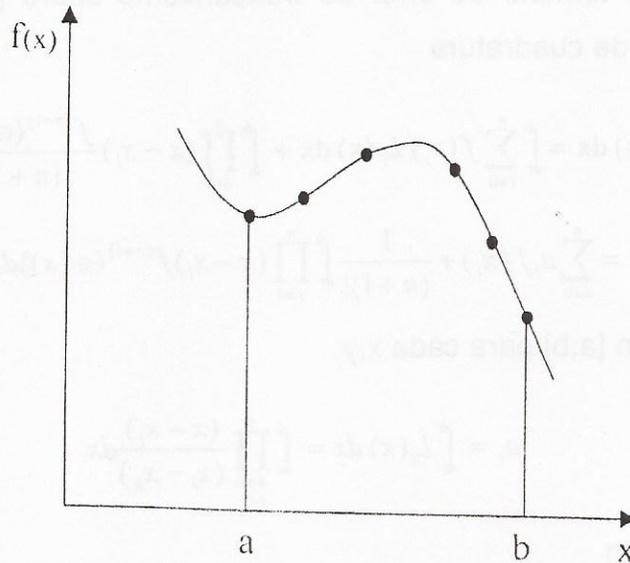


Figura 4

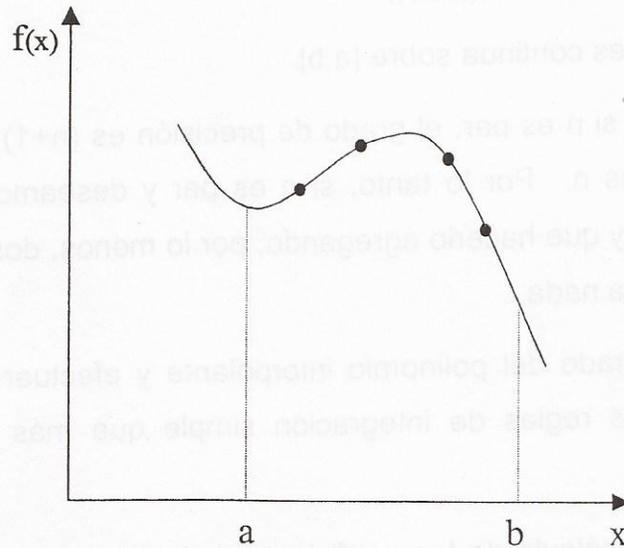


Figura 5

4.1.- FORMULAS CERRADAS DE NEWTON-COTES

Las fórmulas cerradas de Newton-Cotes de $(n+1)$ puntos se obtienen al tomar los nodos equiespaciados $x_i = x_0 + ih$ para $i=0, 1, \dots, n$. Donde $x_0 = a$, $x_n = b$ y $h = (b-a)/n$.

La fórmula general toma entonces la forma:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

Con

$$a_i = \int_a^b L_i(x) dx = \int_a^b \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} dx$$

Y su error de truncamiento vendrá dado por:

$$E = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b t^2(t-1)\dots(t-n) dt$$

Si n es par y $f^{(n+2)}$ es continua sobre $[a, b]$ o por:

$$E = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b t(t-1)\dots(t-n) dt$$

Si n es impar y $f^{(n+1)}$ es continua sobre $[a,b]$.

Obsérvese que si n es par, el grado de precisión es $(n+1)$ y si n es impar el grado de precisión es n . Por lo tanto, si n es par y deseamos ganar precisión añadiendo nodos, hay que hacerlo agregando, por lo menos, dos nodos, ya que al añadir uno no se gana nada.

Al escoger el grado del polinomio interpolante y efectuar las integraciones señaladas surgen las reglas de integración simple que más se aplican en la práctica.

Para mostrar el cálculo de los coeficiente deduciremos la regla trapezoidal, la cual se obtiene al aplicar las fórmulas anteriores para $n=1$. Tendremos los dos puntos extremos del intervalo X_0 y X_1 y el espaciamiento será $h = X_1 - X_0$, luego los coeficientes del polinomio son:

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$a_0 = \int_{x_0}^{x_1} L_0(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx = \frac{1}{x_0 - x_1} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1) dx = \frac{x_1 - x_0}{2}$$

Análogamente:

$$a_1 = \int_{x_0}^{x_1} L_1(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} dx = \frac{1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0) dx = \frac{x_1 - x_0}{2}$$

Luego:

$$I_t = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) = \frac{x_1 - x_0}{2} [f(x_0) + f(x_1)] = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$

Y el error de truncamiento será:

$$E_i = \frac{h^3 f''(\epsilon)}{2} \int_0^1 t(t-1) dt = -\frac{h^3 f''(\epsilon)}{12}$$

Donde $X_0 < \epsilon < X_1$. Esta expresión corresponde a la **Regla del Trapecio** y a su error de truncamiento. Como puede observarse, la regla será exacta si f'' es nula, es decir, si f corresponde a un polinomio de grado menor o igual a uno.

El siguiente cuadro resume algunas fórmulas cerradas de Newton-Cotes:

Grado del Polinomio	Número de Puntos	Fórmula de Integración	Error de Truncamiento	Nombre del Método
1	2	$\frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$	$-\frac{h^3 f''(\epsilon)}{12}$	Regla Trapecial
2	3	$\frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$	$-\frac{h^5 f^4(\epsilon)}{90}$	Regla de Simpson.
3	4	$\frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$	$-\frac{3h^5 f^4(\epsilon)}{80}$	Regla de Simpson De 3/8
4	5	$\frac{2h}{45} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$	$-\frac{8h^7 f^6(\epsilon)}{945}$	

4.2.- FORMULAS ABIERTAS DE NEWTON-COTES

Las fórmulas abiertas de Newton-Cotes de $(n+1)$ puntos se obtienen al integrar sobre todo $[a,b]$ sin considerar los extremos como nodos de cuadratura, y al tomar los nodos equiespaciados $x_i = x_0 + ih$ para $i=0,1,\dots,n$. Donde: $x_0 = a+h$, $x_n = b-h$ y $h=(b-a)/(n+2)$.

Si señalamos los puntos extremos mediante $X_{-1}=a$ y $X_{n+1}=b$, la fórmula general toma entonces la forma:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

Con

$$a_i = \int_a^b L_i(x) dx = \int_a^b \prod_{\substack{k=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} dx$$

Y su error de truncamiento vendrá dado por:

$$E = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_1^{n+1} t^2(t-1)\dots(t-n) dt$$

Si n es par y $f^{(n+2)}$ es continua sobre $[a, b]$, o por:

$$E = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_1^{n+1} t(t-1)\dots(t-n) dt$$

Si n es impar y $f^{(n+1)}$ es continua sobre $[a, b]$,

Para mostrar el modus operandi para las fórmulas abiertas se deduce a continuación la **Regla del Punto Medio**, la cual se obtiene al aplicar las fórmulas anteriores para $n=0$. Se tendrán dos puntos extremos del intervalo X_{-1} y X_1 y el espaciamiento será $h=(X_1-X_{-1})/2$. Luego el coeficiente del polinomio es:

$$L_0(x) = 1$$

Luego:

$$a_0 = \int_{x_{-1}}^{x_1} L_0(x) dx = \int_{x_{-1}}^{x_1} dx = x_1 - x_{-1}$$

Así se tiene:

$$I_f = \int_{x_{-1}}^{x_1} f(x) dx \approx a_0 f(x_0) = (x_1 - x_{-1}) f(x_0) = 2hf(x_0)$$

Y el error de truncamiento será:

$$E_f = \frac{h^3 f'''(\xi)}{2} \int_1^2 (t-1) dt = -\frac{h^3 f'''(\xi)}{12}$$

Donde $X_0 \in \xi \in X_1$. Como puede observarse, la regla será exacta si f''' es nula, es decir, si f corresponde a un polinomio de grado menor o igual a uno.

El siguiente cuadro resume algunas fórmulas abiertas de Newton-Cotes:

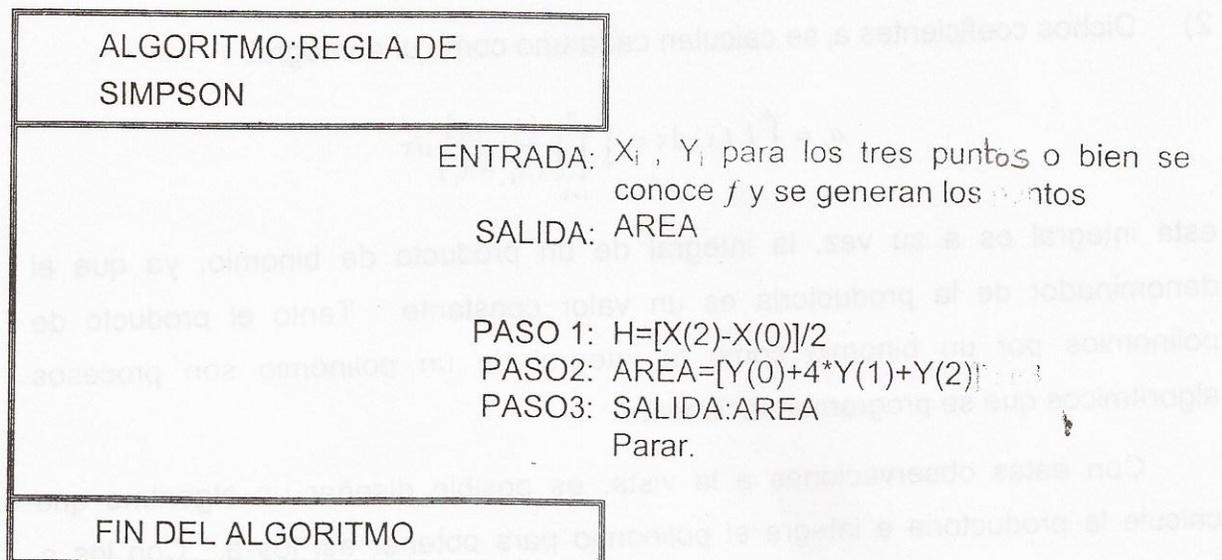
Grado del Polinomio	Número de Puntos	Fórmula de Integración	Error de Truncamiento	Nombre del Método
0	1	$2hf(x_0)$	$\frac{h^3 f'''(\epsilon)}{3}$	Regla del Punto Medio
1	2	$\frac{3h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$	$\frac{3h^3 f'''(\epsilon)}{4}$	
2	3	$\frac{4h}{3}[2f(x_0) - f(x_1) + 2f(x_2)]$	$\frac{14h^5 f^{(4)}(\epsilon)}{45}$	
3	4	$\frac{5h}{24}[11f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + 11f(x_3)]$	$\frac{95h^5 f^{(4)}(\epsilon)}{144}$	

4.3.- ALGORITMOS PARA INTEGRACION NUMERICA SIMPLE ALGUNOS RESULTADOS

Los algoritmos clásicos de integración numérica simple que aplican las reglas enunciadas se pueden resumir en tres macropasos:

1. Leer o generar (dependiendo si la función está definida en forma continua o discreta) las ordenadas y abscisas de la función.
2. Aplicar la fórmula que se adapte al número de puntos conocido.
3. Producir el área como salida.

Si detallamos este algoritmo para la Regla de Simpson obtenemos:



La siguiente tabla identifica las variables utilizadas:

X_i	Abciscas de los nodos de cuadratura
Y_i	Ordenadas en los nodos de cuadratura
H	Distancia entre los nodos de cuadratura
AREA	Area bajo la curva

Sin duda que esta forma de proceder tiene sus limitaciones importantes:

- 1) Por cada una de las reglas enunciadas se tendrá un algoritmo nuevo.
- 2) Como se utilizan las formulas de Newton-Cotes en su expresión más acabada, se requiere que la separación entre los nodos sea uniforme, lo cual no siempre es el caso en las curvas experimentales, donde por lo general, se toma un mayor número de puntos en las zonas de mayor variación de la función y un menor número donde la función es más uniforme.

Estas desventajas son salvables mediante la integración numérica compuesta, sin embargo, la integración numérica simple también ofrece una opción. Si estudiamos más de cerca la forma general de las fórmulas de Newton-Cotes podemos observar lo siguiente:

- 1) La idea es encontrar un polinomio de grado máximo n que pase por $(n+1)$ puntos y cuyos coeficientes son los a_i . Esto permite calcular el área por una simple sumatoria, es decir:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

- 2) Dichos coeficientes a_i se calculan cada uno como una integral:

$$a_i = \int_a^b L_i(x) dx = \int_a^b \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)} dx$$

esta integral es a su vez, la integral de un producto de binomio, ya que el denominador de la productoria es un valor constante. Tanto el producto de polinomios por un binomio como la integral de un polinomio son procesos algorítmicos que se programan fácilmente.

Con estas observaciones a la vista, es posible diseñar un algoritmo que calcule la productoria e integre el polinomio para obtener así los a_i . Con los a_i

obtenidos se puede determinar el área, evaluando la sumatoria indicada en 1). Así llegamos al siguiente algoritmo gerencial:

- 1) Leer los bordes de integración.
- 2) Determinar los puntos por donde debe pasar el polinomio (tomando en cuenta si se aplican las fórmulas cerradas o las abiertas).
- 3) Determinar los L_i mediante el producto de binomios.
- 4) Determinar la primitiva de cada L_i y evaluarla entre los extremos de integración, lo cual arroja cada a_i .
- 5) Acumular el producto de cada a_i por el valor de la función en cada nodo para así obtener el área.

Al aplicar un programa así diseñado para calcular el área bajo la curva $Y=f(x)=1/x$ entre 1 y 3, cuyo valor obtenido en forma analítica es $\ln(3)$, o sea, 1.098612289 con diez dígitos exactos, se obtienen los siguientes resultados:

Programa INSFNC
FORMULAS CERRADAS DE NEWTON-COTES

Función a integrar $F(x)=1/x$
Intervalo de Integración [1.00, 3.00]

N	AREA	ERROR ABSOLUTO	ERROR RELATIVO
1	1.33333333330	0.23472104433	21.37%
2	1.11111111110	0.01249882211	1.14%
3	1.10476190490	0.00614961586	0.56%
4	1.09925925910	0.00064697013	0.06%
5	1.09899976600	0.00038747704	0.04%
6	1.09866209260	0.00004980359	0.00%
7	1.09864437340	0.00003208437	0.00%
8	1.09862200880	0.00000971976	0.00%
9	1.09856421820	0.00004807079	0.00%
10	1.09868906130	0.00007677229	0.01%
11	1.09781509540	0.00079719363	0.07%
12	1.01533144140	0.08328084760	7.58%
13	1.22091057590	0.12229828693	11.13%
14	17.24356184800	0.14494955900	1469.58%
15	-32.42273297000	0.52134525900	3051.24%

Programa INSFNC
FORMULAS ABIERTAS DE NEWTON-COTES

Función a integrar $F(x)=1/x$
Intervalo de Integración [1.00, 3.00]

N	AREA	ERROR ABSOLUTO	ERROR RELATIVO
0	1.00000000000	0.09861228900	8.98%
1	1.02857142860	0.07004086043	6.38%
2	1.08888888890	0.00972340009	0.89%
3	1.09150109150	0.00711119745	0.65%
4	1.09749999590	0.00111229308	0.10%
5	1.09778805400	0.00082423505	0.08%
6	1.09847575060	0.00013653841	0.01%
7	1.09850778540	0.00010450355	0.01%
8	1.09851339030	0.00009889874	0.01%
9	1.09869937580	0.00008708683	0.01%
10	1.10517828050	0.00656599149	0.60%
11	0.98715988203	0.11145240697	10.14%
12	1.22248854290	0.12387625390	11.28%
13	0.32621904157	0.77239324743	70.31%
14	-4.64138073420	5.73999302320	522.48%
15	-173.46636810000	174.56498039000	15889.59%

De estos resultados surgen las observaciones siguientes:

- 1) Las fórmulas cerradas generalmente producen resultados superiores a las fórmulas abiertas del mismo orden
- 2) En cualquiera de los dos casos ocurre una disminución del error hasta un cierto punto y posteriormente, el error comienza a aumentar.

Si analizamos lo que ocurre para el ejemplo que nos ocupa en el caso de las fórmulas cerradas, observamos que el error es decreciente hasta un polinomio de grado 8, luego comienza a aumentar. El decrecimiento inicial se debe a la disminución del error de truncamiento al aumentar el número de puntos comunes a la curva y al polinomio. El crecimiento inicial a partir de ese mínimo ocurre debido a las oscilaciones del polinomio, lo cual genera errores mayores. Esto es cierto para los polinomios de grado 9 y 10 en este caso. A partir del grado 11 comienzan a mandar los errores de redondeo en el cálculo de los coeficientes del polinomio, por los que las áreas obtenidas no tienen ningún significado real.

5.- INTEGRACION NUMERICA COMPUESTA

Hemos establecido que la integración numérica simple no es apropiada para la integración sobre intervalos grandes, donde por lo general se requiere utilizar fórmulas de Newton-Cotes de alto grado y en este caso, los coeficientes del polinomio interpolante se ven afectados por errores de redondeo. Por otra parte, la escogencia de nodos igualmente espaciados es un procedimiento inexacto por la naturaleza oscilante de los polinomio de alto grado.

La metodología consiste en dividir el intervalo $[a,b]$ en cierta cantidad de subintervalos más pequeños, se aplica a cada uno de ellos la integración simple utilizando polinomios de grado bajo y se suman las áreas obtenidas, se llega a un área total aproximada.

Veamos como se aplica esta técnica a la regla del trapecio. Recordemos que esta regla se puede escribir para un intervalo $[X_{i-1}, X_i]$ como:

$$I_i = \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

Y su error de truncamiento como:

$$E_t = -\frac{h^3 f'''(\epsilon)}{12}$$

Luego, al integrar sobre todo $[a, b]$ tenemos:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)] - \sum_{i=1}^n \frac{h^3 f'''(\epsilon)}{12}$$

Después de varias operaciones se llega a:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{2} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] - \frac{(b-a)h^2 f''(\mu)}{12}$$

que es la Regla del Trapecio Compuesta para n subintervalos.

De forma análoga, se pueden determinar las reglas compuestas para las otras fórmulas de Newton-Cotes, así tenemos por ejemplo, que la Regla de Simpson compuesta para n subintervalos (n par) sería:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} \left[f(a) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i) + f(b) \right] - \frac{(b-a)h^4 f^{(4)}(\mu)}{180}$$

Así tenemos que la Regla del Punto Medio Compuesta sería:

$$\int_a^b f(x) dx = 2h \sum_{i=0,2,4}^n f(x_i) + \frac{(b-a)h^2 f''(\mu)}{6}$$

5.1.- CASO DE FUNCIONES DISCRETAS CON PUNTOS NO EQUISPACIADOS

Si se nos suministra la función f en forma discreta mediante un conjunto de puntos equiespaciados, se pueden aplicar las técnicas de integración compuesta que hemos descrito anteriormente. Sin embargo existe la posibilidad, de hecho así ocurre, que se nos suministre f mediante puntos no equiespaciados, sobre todo en caso de funciones experimentales.

En caso de que no se pueda disponer de espaciamiento uniforme, la Regla del Trapecio Compuesta no es aplicable en forma directa, sin embargo, se puede aplicar n veces la Regla del Trapecio para integración simple, o sea:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [x_i + x_{i-1}] [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

También es posible aplicar las reglas en forma alternada, por ejemplo, si se exploran los intervalos y se encuentran dos intervalos de ancho diferente se puede aplicar la Regla Trapecial, si se encuentra que los dos siguientes son iguales, se puede aplicar la regla de 1/3 de Simpson, y así sucesivamente hasta cubrir todo $[a,b]$.

6.- METODOS ESPECIALES CUANDO SE CONOCE LA EXPRESIÓN ANALITICA DE f .

Hemos mencionado que la función f a integrar puede estar definida en forma discreta (tabular, por un conjunto de puntos) o en forma continua (por su expresión analítica). La forma como se suministra la función f tiene gran influencia en el método de integración a seleccionar. Para el caso de la función tabular, se está limitado al número de puntos dados. En contraste, si se conoce la expresión analítica de f , se pueden generar tantos valores de $f(x)$ como sean necesarios para mejorar la precisión. Los métodos que hemos descrito hasta ahora se aplican a ambos tipos de funciones, sin embargo debemos mencionar dos técnicas expresamente diseñadas para el caso cuando se conoce la expresión analítica de f , tales son la *Integración de Romberg* y la *Cuadratura Gaussiana*.

6.1.- INTEGRACION DE ROMBERG

En términos generales, se puede afirmar que la precisión de una de las reglas estudiadas aumenta al aumentar el número de subintervalos, lo cual es sencillo de entender pues se está disminuyendo el error de truncamiento, sin embargo, llega un momento en que no es posible disminuir el error total y al aumentar n comienza a aumentar el error, esto se debe a que comienzan a dominar los errores de redondeo derivados de la aritmética de dígitos finitos que usa el computador.

La Integración de Romberg es un método diseñado para evitar estos inconvenientes. Está basado en la aplicación sucesiva de la Regla Trapecial y en

la *Extrapolación de Richardson*, manipulación matemática que permite corregir errores.

6.1.1.- EXTRAPOLACION DE RICHARDSON

Sea I el valor exacto de la integral, sea $I(h)$ el valor aproximado de la integral usando la Regla Trapeoidal, y sea $E(h)$ el error de truncamiento cometido al emplear el paso $h=(b-a)/n$, entonces:

$$I = I(h) + E(h)$$

Si se obtienen dos aproximaciones usando pasos h_1 y h_2 tendremos:

$$I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2) \quad (1)$$

Toda vez que el error de la Regla Trapeoidal compuesta viene dado por:

$$E = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\mu)$$

Si se supone que $f''(\mu)$ es una constante podemos escribir:

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

O sea:

$$E(h_1) = \frac{h_1^2}{h_2^2} * E(h_2)$$

Entonces, al sustituir en la fórmula (1) se llega a:

$$I(h_1) + \frac{h_1^2}{h_2^2} E(h_2) = I(h_2) + E(h_2)$$

Lo cual permite obtener:

$$E(h_2) = \frac{1}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 1} [I(h_2) - I(h_1)]$$

Que es una expresión que permite expresar el error de truncamiento en términos del valor de la integral y del tamaño del paso. Entonces una nueva aproximación se obtiene mediante:

$$I \approx I(h_2) + \frac{1}{2^2 - 1} [I(h_2) - I(h_1)]$$

Para el caso particular en que $h_2 = h_1/2$ se tiene que:

$$I \approx I(h_2) + \frac{1}{\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 - 1} [I(h_2) - I(h_1)]$$

lo cual al reordenar queda:

$$I \approx \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1)$$

Se demuestra que partiendo de dos aproximaciones cuyo error era del orden h^2 se logra una nueva aproximación cuyo error es del orden h^4 . Combinando dos resultados cuyo error es del orden h^4 se logra una aproximación cuyo error es del orden h^6 .

La expresión de iteración general de la Integración de Romberg es:

$$I_{j,k} = \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

Donde $I_{j+1,k-1}$ e $I_{j,k-1}$ son las integrales más o menos exactas respectivamente, e $I_{j,k}$ es la integral mejorada. El índice k sirve para señalar el nivel de integración, $k=1$ corresponde al error del orden h^2 , $k=2$ corresponde al error del orden h^4 , etc.

Por ejemplo, sean los siguientes valores correspondientes a la aplicación de la Regla Trapecial con 1,2,4 y 8 subintervalos.

SUBINTERVALOS	H	INTEGRAL POR TRAPECIO
1	0.8	0.17280000
2	0.4	1.06880000
4	0.2	1.48480000
8	0.1	1.60080000

Combinando dos a dos los valores se obtienen tres aproximaciones, cuyo orden de error es de h^4 , combinando dos a dos estos tres últimos resultados se obtienen dos cuyo orden de error es h^6 y, por último, combinando estos se llega a una aproximación cuyo orden de error es h^8 .

0.17280000			
	1.36746667		
1.06880000		1.64053334	
	1.62346667		1.64053334
1.48480000		1.64053334	
	1.63946667		
1.60080000			

Nótese que la extrapolación no es más que un promedio ponderado que asigna mayor peso a la mejor integral obtenida.

6.1.2.- FORMA PARTICULAR DE LA REGLA TRAPEZIAL COMPUESTA

Resulta interesante revisar la forma de la Regla Trapezial Compuesta cuando se divide sucesivamente entre dos el ancho h de los subintervalos. La idea es obtener una expresión de $I_{j,1}$, es decir, las aproximaciones iniciales para aplicar la Extrapolación de Richardson. Para valores decrecientes de h , comenzando por $h_1=(b-a)$, $h_2=(b-a)/2$, etc. Hasta $h_k=(b-a)/2^k$ se obtiene:

$$I_{1,1} = \frac{h_1}{2} [f(a) + f(b)]$$

$$I_{2,1} = \frac{h_2}{2} [f(a) + 2f(a+h_2) + f(b)] = \frac{h_1}{4} [f(a) + f(b)] + h_2 f(a+h_2)$$

$$= \frac{1}{2} I_{1,1} + h_2 f(a+h_2)$$

$$I_{3,1} = \frac{h_3}{2} [f(a) + 2f(a+h_3) + 2f(a+2h_3) + 2f(a+3h_3) + f(b)]$$

$$= \frac{1}{2} I_{2,1} + h_3 [f(a+h_3) + f(a+3h_3)]$$

En general se tiene que:

$$I_{k,1} = \frac{1}{2} I_{k-1,1} + h_k \sum_{i=1}^{2^{k-2}} f(a + (2i-1)h_k)$$

6.1.3.- ALGORITMO DE ROMBERG

Un algoritmo para este método sería:

ALGORITMO: INTEGRACION DE
ROMBERG

ENTRADA: A, B y N

SALIDA: ARREGLO IN

PASO 1: $H=B-A$
 PASO 2: $INA(1)=H * (f(A)+f(B)) / 2$
 PASO 3: SALIDA: INA
 PASO 4: Para $l=2$ a N repetir pasos 5 al 13
 PASO 5: $IN(1)=0$
 PASO 6: Para $K=1$ a $2^{(l-2)}$ repetir paso 7
 PASO 7: $IN(1)=IN(1)+H*f(A+(2*K-1)*H)$
 PASO 8: $IN(1)=[INA(1)+IN(1)] / 2$
 PASO 9: Para $J=2$ a l repetir el paso 10
 PASO 10: $IN(J)=[4^{J-1} * IN(J-1) - INA(J-1)] / [4^{J-1}-1]$
 PASO 11: SALIDA: IN
 PASO 12: $H=H/2$
 PASO 13: $INA=IN$
 PASO 14: Parar

FIN DEL ALGORITMO

Donde la siguiente tabla ilustra el significado de las variables y funciones utilizadas:

A y B	Extremos del intervalo de integración
N	Número de integraciones iniciales
IN e INA	Vectores de valores de integración
H	Ancho de los subintervalos
K , I , J	Variables auxiliares

6.2.- CUADRATURA GAUSSIANA

La Figura 6 muestra la Regla Trapecial Simple aplicada a una función. Nótese que si se desplaza esta recta eliminando la condición de que debe pasar por los nodos de cuadratura, deben existir dos puntos por los cuales los errores se compensen.

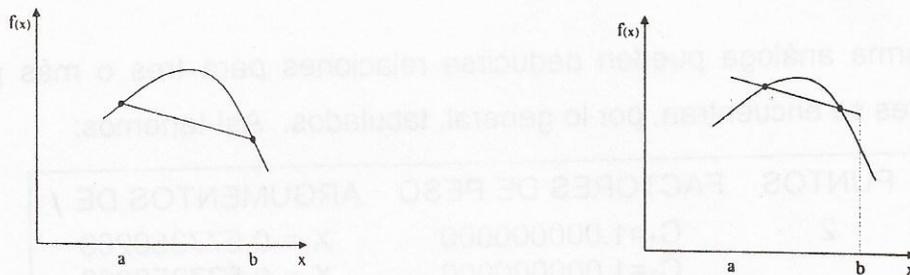


Figura 6

La *Cuadratura Gaussiana* es uno de los métodos que se encarga de implementar esta estrategia. La idea para el caso de dos puntos, es evaluar la integral mediante:

$$I = c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

en donde no se conocen C_1 , C_2 , X_1 ni X_2 . Se tienen entonces cuatro incógnitas y por lo tanto se requieren cuatro condiciones para determinarlas. Se supone que la integral I se ajusta exactamente al área bajo polinomios ortogonales en el intervalo $[-1,1]$ de grado 0, 1, 2 y 3. Llegándose así al sistema:

$$c_1 + c_2 = \int_{-1}^1 dx = 2$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = \int_{-1}^1 x dx = 0$$

$$c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = 2/3$$

$$c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3 = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$

que al resolverlo arroja:

$$c_1 = c_2 = 1, \quad x_1 = -3^{-1/2} \quad \text{y} \quad x_2 = 3^{-1/2}$$

Este resultado significa que la integral puede calcularse por la simple relación:

$$I = f\left(-1/3^{1/2}\right) + f\left(1/3^{1/2}\right)$$

En forma análoga pueden deducirse relaciones para tres o más puntos y estos valores se encuentran, por lo general, tabulados. Así tenemos:

PUNTOS	FACTORES DE PESO	ARGUMENTOS DE f
2	$C_1=1.000000000$	$X_1=-0.577350269$
	$C_2=1.000000000$	$X_2=0.577350269$
3	$C_1=1.555555556$	$X_1=-0.774596669$
	$C_2=0.888888889$	$X_2=0.000000000$
	$C_3=0.555555556$	$X_3=0.774596669$
4	$C_1=0.347854845$	$X_1=-0.861136312$
	$C_2=0.652145155$	$X_2=0.339981044$
	$C_3=0.652145155$	$X_3=0.339981044$
	$C_4=0.347854845$	$X_4=0.861136312$

Nótese que estos valores se dedujeron para el intervalo $[-1,1]$, por lo que para evaluar la función debe hacerse en ella un cambio de variables que garantice este hecho. Por ejemplo, si el intervalo de integración es $[a,b]$, se tiene:

$$x = a_0 + a_1 x_d$$

donde el límite inferior a corresponde a $X_d = -1$ y el límite superior b corresponde a $X_d = 1$.

7.- INTEGRACION ADAPTATIVA

Todas las fórmulas de integración numérica requieren el uso de nodos uniformemente espaciados. Para muchos problemas esta no es una restricción importante, pero cuando se tiene que integrar una función que contiene, en un intervalo, "regiones con variaciones funcionales grandes" y "regiones con variaciones funcionales pequeñas" esta restricción es importante. Dada esta situación, se necesitará un tamaño de paso menor en las regiones de variación grande que el tamaño de paso utilizado en las regiones de poca variación.

Una técnica eficiente para este tipo de problemas, es aquella que puede "distinguir" la cantidad de la variación funcional y que "adapte" el tamaño del paso a los requerimientos cambiantes del problema. A estos métodos se les llama, apropiadamente, *Métodos Adaptativos de Cuadratura*.

La *Integración Numérica Adaptativa* es un método adaptativo de cuadratura que se basa en la aplicación de la Regla Trapezoidal Compuesta y en la Integración de Romberg, Está diseñada expresamente para analizar casos en que se conoce la función. Aprovecha la facilidad de generar valores de la función en el desarrollo de esquemas eficientes de integración numérica, al adaptar el tamaño del paso. La integración numérica adaptativa procura "escoger" el ancho h reflejando, de alguna manera, la variación de la función. Veamos que ocurre cuando se aplica esta técnica:

Supongamos que queremos aproximar la $\int_a^b f(x) dx$ dentro de cierta tolerancia especificada ϵ . Conocemos que $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ cumple con las condiciones necesarias para aplicar el método (regiones con mucha/poca variación) y disponemos de la expresión analítica de la función (definida en forma continua).

Si llamamos I al valor exacto de la integral sobre $[a,b]$ y S a un valor aproximado dentro de una tolerancia ϵ , tenemos:

$$|I - S| \leq \epsilon$$

Para lograr esto se divide $[a,b]$ en varios subintervalos $[X_i, X_{i+1}]$ de longitud $h_i = X_{i+1} - X_i$ y sabemos que la contribución de cada subintervalos al error es:

$$-\frac{h_i^3 f''(\mu_i)}{12} \quad \text{para } X_i < \mu_i < X_{i+1}$$

Evidentemente, el tamaño de este error dependerá de h_i . La idea es escoger los subintervalos de manera que su contribución parcial al error sea más o menos la misma.

Si $I(h_i)$ es la integral exacta y $S(h_i)$ es una aproximación sobre $[X_i, X_{i+1}]$, al hacer cumplir:

$$|I(h_i) - S(h_i)| \leq \frac{h_i \varepsilon}{(b-a)}$$

entonces, el error total se mantiene por debajo de ε .

El proceso comienza calculando el valor S_1 ; correspondiente a $h_1 = b-a$ y S_2 correspondiente a $h_2 = (b-a) / 2 = h_1 / 2$ mediante:

$$S_1 = h_1 [f(a) + f(b)]$$

$$S_2 = \frac{1}{2} S_1 + h_2 f(a + h_2)$$

Según lo indicado anteriormente en la forma particular de la Regla Trapecial Compuesta.

Los errores de estas dos aproximaciones vienen dados por:

$$|I - S_1| = \frac{-h_1^3 f''(\mu_1)}{12} \quad (I)$$

$$|I - S_2| = \frac{-h_2^3 f''(\mu_2)}{12} = \frac{2 \left(\frac{h_1}{2}\right)^3 f''(\mu_2)}{12} \quad (II)$$

El factor 2 se origina porque se está integrando sobre dos subintervalos adyacentes.

La estimación del error se deriva suponiendo que $f''(\mu_1) = f''(\mu_2)$. En otras palabras, f'' razonablemente constante en $[a,b]$. El "éxito" de esta técnica depende de la exactitud de esta hipótesis. Restando (I) y (II) obtenemos:

$$S_2 - S_1 \approx \frac{f''(\mu) \left(\frac{h_1}{2}\right)^3 (2 - 2^3)}{12} \quad \text{de donde: } \frac{f''(\mu) \left(\frac{h_1}{2}\right)^3}{12} \approx \frac{(S_2 - S_1)}{-6}$$

Usando esta estimación en (II), se obtiene la estimación del error:

$$|I - S_2| \approx \frac{(S_2 - S_1)}{3}$$

El error en la aproximación más exacta (S_2) es más o menos, un tercio de la diferencia ($S_2 - S_1$) y se puede calcular con facilidad.

Luego, si se cumple:

$$\frac{(S_2 - S_1)}{3} \leq \varepsilon \quad (\text{III})$$

se aceptará S_2 como una buena aproximación de la $\int_a^b f(x) dx$. Cuando la desigualdad (III) no se satisfaga, se aplica el procedimiento de estimación del error individual a los subintervalos de la mitad derecha e izquierda respectivamente, para determinar si la aproximación a la integral en cada subintervalo está dentro de una tolerancia $\varepsilon/2$. Si es así, sumando las aproximaciones, la aproximación resultante a la integral estará dentro de la tolerancia ε . Si la aproximación en uno de los subintervalos no está dentro de una tolerancia $\varepsilon/2$, éste se subdivide, y en cada uno de los subintervalos se analiza para determinar si la aproximación en ese subintervalo es exacta dentro de $\varepsilon/4$. Este procedimiento de subdivisión se continúa, recursivamente, hasta que cada porción queda con la tolerancia requerida.

Ilustremos este método con un ejemplo:

$$\text{Evaluar } \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \text{ con una exactitud } \varepsilon=0.005$$

1. Evaluar S_1 (aproximación a la integral sobre el intervalo total de integración):

$$S_1 = \frac{1}{2} [f(0) + f(1)] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \right] = \frac{3}{4} = 0.75$$

2. Dividiendo el intervalo en dos, obtenemos:

$$h = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$S_2 = \frac{1}{2} S_1 + 0.5 f(0 + 0.5) = 0.7083$$

luego: $\frac{1}{3} |S_2 - S_1| = 0.013889$, que es $> 0.005 \Rightarrow$ No se satisface la prueba del error con este tamaño de intervalo, por lo cual se aproxima la integral en el primer intervalo $[0, 0.5]$.

$$h = 0.5$$

$$\text{tolerancia} = \frac{\varepsilon}{2} = 0.0025$$

$$1ra. \text{ aproximación: } S_1 = \frac{0.5}{2} [f(0) + f(0.5)] = \frac{0.5}{2} [1 + 0.666] = 0.416667$$

$$2da. \text{ aproximación: } h = \frac{0.5}{2} = 0.25 \quad S_2 = \frac{1}{2} (0.416667) + 0.25 f(0 + 0.25) = 0.408334$$

$$\text{Estimación del error: } \frac{1}{3} |S_2 - S_1| = \frac{1}{3} |0.408334 - 0.416667| = 0.0028 (> 0.0025) \Rightarrow$$

No satisface. Así que se divide el intervalo $[0, 0.5]$ en los dos siguientes: $[0, 0.25]$ y $[0.25, 0.5]$, y se considera la integral por turno en cada uno:

$$\text{Intervalo } [0, 0.25] - \text{tolerancia} = \frac{\varepsilon}{4} = 0.00125$$

$$S_1 = \frac{0.25}{2} [f(0) + f(0.25)] = \frac{0.25}{2} [1 + 0.8] = 0.2250$$

$$S_2 = \frac{1}{2} S_1 + \frac{0.25}{2} f(0.125) = 0.223611 = A_1$$

Estimación del error: $\frac{1}{3} |S_2 - S_1| = 0.000463 (< 0.00125) \Rightarrow$ Satisface la prueba del error. Así que tenemos entonces la primera contribución (A_1) a la integral sobre el área total.

Considerando ahora el Intervalo $[0.25, 0.5]$

$$S_1 = \frac{0.25}{2} [f(0.25) + f(0.5)] = \frac{0.25}{2} [0.8 + 0.666] = 0.183250$$

$$S_2 = \frac{1}{2} S_1 + 0.125 f(0.375) = 0.182534 = A_2$$

Estimación del error: $\frac{1}{3} |S_2 - S_1| = 0.00023 (< 0.00125) \Rightarrow$ Satisface la prueba del error, con lo cual tenemos entonces otra contribución a la integral (A_2) sobre el área total.

Considerando ahora el Intervalo $[0.5, 1]$ cuyo límite de error es 0.0025 (igual al del intervalo $[0, 0.5]$ inicialmente).

$$S_1 = \frac{0.5}{2} [f(0.5) + f(1)] = 0.291667$$

$$S_2 = \frac{1}{2} S_1 + 0.25 f(0.75) = 0.288690 = A_3$$

Estimación del error: $\frac{1}{3} |S_2 - S_1| = 0.00099 (< 0.0025) \Rightarrow$ Se satisface la prueba del error, con lo cual tenemos entonces la contribución final a la integral sobre el área total. La estimación final de la integral será $A_1 + A_2 + A_3$ y el uso del método ha tenido éxito.

La integración adaptativa es aplicable con cualquiera de las reglas de integración numérica, siendo la versión 1/3 de Simpson una de las más populares. La mayor dificultad asociada con el método reside en la tarea de estar al tanto de la etapa alcanzada (nivel de integración), debe saberse sobre qué intervalo se está integrando y cuál es el siguiente subintervalo a considerar. Es obvio que si la derivada de f cambia con rapidez en algún subintervalo, entonces será necesario crear muchos subintervalos anidados para calcular la integral con la exactitud requerida.

8.- ESCOGENCIA DEL MÉTODO DE INTEGRACIÓN

La escogencia del método de integración numérica depende en primera instancia del tipo de definición que tenga la función, en segundo lugar, de la precisión que se desea obtener y en tercer lugar del ancho del intervalo de integración.

Las fórmulas de Newton-Cotes en su forma cerrada son los esquemas más ampliamente utilizados. El compromiso se establece entre integrar una sola vez un polinomio de grado alto o integrar varias veces polinomios de grado bajo. Si el intervalo de integración es lo suficientemente "estrecho" la integración numérica simple arroja resultados viables siempre y cuando el número de puntos no pase de 5 o 6. Si se requieren más puntos, es preferible utilizar la integración compuesta.

Para aplicar la integración compuesta con una sola de las reglas, debe ponerse atención al número de puntos, por ejemplo, la regla compuesta de $1/3$ de Simpson se debe aplicar solamente si se dispone de un número par de puntos, la regla de $3/8$ de Simpson se puede aplicar solamente si se dispone de un número de puntos que sea múltiplo de 3. Existen esquemas combinados que permiten utilizar varias reglas alternadamente, por ejemplo, si el número de puntos es impar se puede aplicar la regla $1/3$ de Simpson y dejar los últimos tres puntos para la regla $3/8$.

Si se necesita gran exactitud y se dispone de la expresión analítica de la función, la Integración de Romberg y la Cuadratura Gaussiana arrojan por lo general, resultados satisfactorios.

En caso de que la función presente variaciones fuertes en el intervalo de exploración, y esté definida en forma continua, la integración adaptativa surge como una solución viable.